

# QPBO アルゴリズムの多値化による非劣モジュラエネルギー最小化

トーマス ヴィントホイザー<sup>†,††</sup> 石川 博<sup>††</sup> ダニエル クレマース<sup>†</sup>

<sup>†</sup> ミュンヘン工科大学 情報学部

Informatik 9, Boltzmannstrasse 3, 85748 Garching, Germany

<sup>††</sup> 早稲田大学大学院 基幹理工学研究科

〒169-8555 東京都新宿区大久保 3-4-1

E-mail: <sup>†</sup>{thomas.windheuser,daniel.cremers}@in.tum.de, <sup>††</sup>hfs@waseda.jp

**あらまし** マルコフ確率場エネルギーの最小化問題は一般には NP 困難であるが、1 階 2 値エネルギーの場合、劣モジュラならグラフカットにより大域最小化でき、また非劣モジュラでも大域最小解を部分的に得られる QPBO アルゴリズムが存在する。本稿では、この QPBO アルゴリズムの多値版を与える。これにより、劣モジュラでないものを含め、ラベル集合が線形順序を持つ 1 階多値エネルギーについて大域最小解がとり得るラベルの範囲を各画素で与える部分的最小化が、繰り返しによらずに可能になる。そのために、理論的基礎であるルーフ双対性の概念を一般化し、また QPBO アルゴリズムを可能にする持続性という性質が多値の場合にも高階のときを含めて維持されることを示す。  
**キーワード** マルコフ確率場, 離散最適化, エネルギー最小化, グラフカット, QPBO, ルーフ双対性

## 1. はじめに

エネルギー最小化は領域分割, ノイズ除去, ステレオなどの多種の問題において画像処理やコンピュータビジョンにおける標準的な手法となった。中でも最も一般的になったグラフカットは、最小切断アルゴリズムによる 1 階 2 値劣モジュラエネルギーの大域最小化を基本に、より困難なエネルギー最小化を目指して活発に研究されている。

特に、(I) 非劣モジュラ, (II) 多値, (III) 高階のいずれかの性質を持つエネルギーの最小化のために様々な工夫がされてきた。例えば、 $\alpha$ - $\beta$  交換や  $\alpha$  拡張などの移動アルゴリズム [3] は、(I) と (II) の問題に挑戦し、1 階 2 値劣モジュラエネルギーを繰り返し最小化することにより、非劣モジュラな多値エネルギーの近似最小化を可能にした。その他にも、上記各方向に次のような進展があった。

- (I) QPBO アルゴリズムにより、多くの非劣モジュラ 1 階 2 値エネルギーの最小化が可能である [1], [2], [7], [14].
- (II) 線形順序を持つラベル集合の場合にはエネルギーが凸 (劣モジュラ) であれば大域最小化できる [9], [15], [16].
- (III) 2 値高階エネルギーは 1 階に変換でき、また繰り返しにより多値の近似最小化も可能である [4], [6], [8], [10], [11].

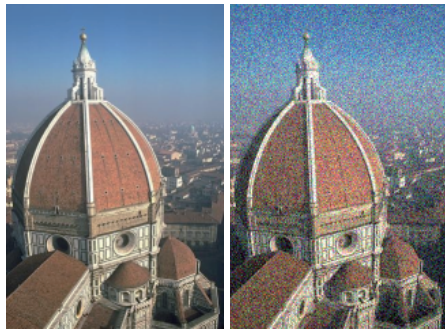
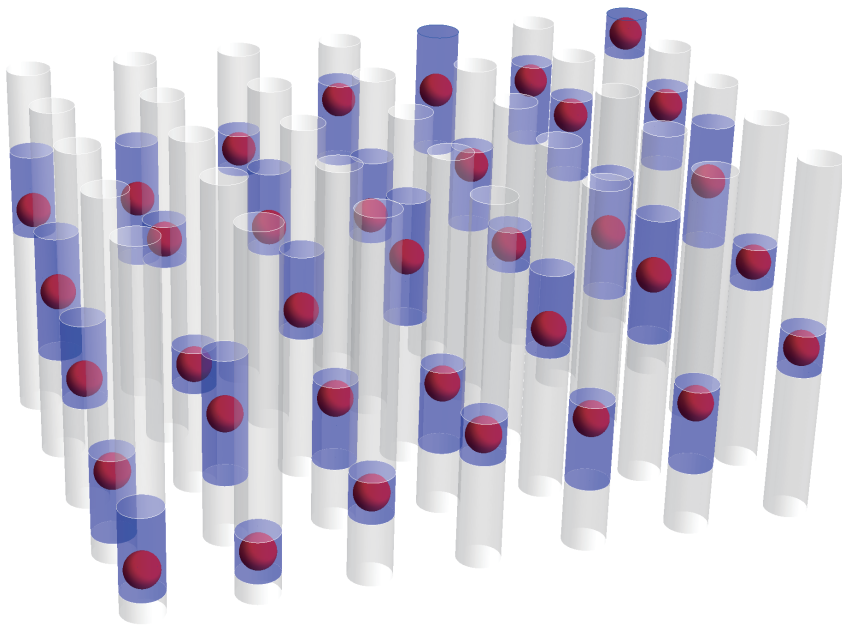
本稿では QPBO アルゴリズムの多値版を与え、移動アルゴリズムのような繰り返しによらないで (I)(II) の方向に進展させ、劣モジュラでない多値エネルギーを最小

化するアルゴリズムを実現する。また理論的結果は高階エネルギーの場合 (III) にも同様に適用可能である。

そのために、QPBO アルゴリズムの理論的基礎であるルーフ双対性の概念を 3 元以上のラベル集合が線形順序を持つ場合に拡張する。ルーフ双対性は最近、Kolmogorov [13] および Kahl と Strandmark [11] により高階 2 値の場合、つまり (III) の方向に拡張されたが、ここでは非繰り返し多値最小化アルゴリズム [9], [15], [16] を使うことにより (II) の方向に拡張する。これを基礎に、2 値の場合と同様に、与えられたエネルギーの最小値の下界を最小値として与える劣モジュラ関数 (劣モジュラ緩和関数) を構成し、それを代わりに最小化する。

本稿の貢献は、(1) ルーフ双対性を多値の場合に一般化し、2 値の場合に知られるルーフ双対の持続性 (persistence) という性質が、線形順序を持つ多値の場合にも任意階で成り立つことを示すことと、(2) さらに 1 階の場合にはこの劣モジュラ緩和関数のうち最小値が最大のもの (最適劣モジュラ緩和関数) が具体的に構成できることを示し、それにより劣モジュラでない多値エネルギーを部分的に最小化する QPBO の多値版ともいべきアルゴリズムを与えることである。

本稿の主要結果の一つである持続性定理 (定理 1) の意味を説明する例を図 1 に示す。与えられたエネルギーが最小化の困難な非劣モジュラ関数であっても、持続性は少なくとも 1 つの大域最小解が各画素でとる値の範囲という形で情報を与える。2 値の場合の QPBO アルゴリズムは各画素にラベルを与えるか与えないかであり、与えなければその画素について何の情報も得られないのと対照的に、多値の場合には、大域最小解の存在する範囲を狭めて探索空間をより限定することができる。



(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

図1 非劣モジュラエネルギーの最小化

ここで対象とするのは一般には NP 困難な形のエネルギーなので、当然全ての場合に最小化できることは望めないが、本稿のアルゴリズムは大域最小解をとるラベルの可能な範囲を与える。その幅によって、最小化がどの程度成功しているかも評価可能である。(a)はその様子を図式的に示したものである。円柱内を上下できる赤い球が大域最小解、円柱の青い部分がアルゴリズムの与えるラベルの範囲を表し、青い部分が短いほど大域最小解に迫ることができる。(b)-(e)は、非劣モジュラエネルギー(19)を最小化したノイズ除去の例である。(b)は元画像、(c)はそれに $\sigma = 0.2$ のガウシアンノイズを加えた画像で、(d)はアルゴリズムが与える大域最小解が各画素でとる範囲の下限、(e)は上限である。この例の場合、各色チャンネル40階調中、各画素で与えられる範囲の幅の平均は1.2であり、下限と上限の画像は同じに見える。つまり、元の非劣モジュラエネルギーの大域最小解に非常に近い解が見つかったことがわかる。

本稿は以下、次のように構成される。次節では、多値エネルギーに一般化したルーフ双対を定義する。第3節では、本稿の主要結果である多値ルーフ双対の持続性を証明する。第4節では、1階の場合について、与えられたエネルギーの劣モジュラな最大下界エネルギーを与えるアルゴリズムを与える。第5節では、ノイズ除去を例に、一般化ルーフ双対アルゴリズムの有効性を実験的に確かめる。

## 2. ルーフ双対の多値への一般化

本節ではまず多値に一般化したルーフ双対を定義し、その簡単な性質を証明する。

### 2.1 線形順序ラベル集合

本稿では線形順序を持つラベル集合に値をとる変数を扱う。そのようなラベル集合はここでの目的のためには整数の集合

$$\mathcal{L} = \{0, \dots, \ell - 1\}$$

と順序を含めて同一視することができる。ラベル $x \in \mathcal{L}$ について、2値の時の否定に対応する演算子を

$$\bar{x} = \ell - (x + 1).$$

で定義する。ラベル値のベクトル $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{L}^n$ についても、演算 $\neg, +, -, \min, \max$ は例えば $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ のように成分毎に作用することとする。

### 2.2 多値最小化問題と劣モジュラ緩和

本稿における多値最小化問題とは、 $\mathcal{L}$ に値をとる $n$ 個の変数の実数値関数 $f: \mathcal{L}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を最小化する問題である:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{L}^n} f(\mathbf{x}).$$

一般の $f$ についてのこの最小化問題は2値( $\ell = 2$ )の場合でさえNP困難である。そこで $f$ の値の下界を与える $2n$ 変数の劣モジュラ関数を最小化することを考える(劣モジュラ性の定義はすぐ下で与える):

$$\min_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{L}^{2n}} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

ただし $g: \mathcal{L}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ は次の条件を満たす。

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}^n : g(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = f(\mathbf{x}), \quad (1)$$

$$g \text{ は劣モジュラ,} \quad (2)$$

$$\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{L}^{2n} : g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}}) \text{ (対称性)} \quad (3)$$

条件 (1) によって、 $f$  のとり得る値は  $g$  もとり得るので、

$$\min_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{L}^{2n}} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{L}^n} f(\mathbf{x})$$

より  $g$  の最小値は  $f$  のとり得る値の下界となる。また、劣モジュラ条件 (2) のため、 $g$  は大域最小化をすることができる。このような  $g$  を  $f$  の劣モジュラ緩和と呼ぶ。通常、劣モジュラ性はラベルが 2 値の擬ブール関数について定義されるが、ここでその定義を線形順序を持つ多値のラベル集合の場合に拡張する。

**定義 1.** 線形順序を持つ有限集合  $\mathcal{L} = \{0, \dots, \ell - 1\}$  について、関数  $\theta : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$  が劣モジュラであるとは、 $x_1 < x_2, y_1 < y_2$  である任意の  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathcal{L}$  について次の不等式を満たすことである。

$$\theta(x_1, y_1) + \theta(x_2, y_2) \leq \theta(x_1, y_2) + \theta(x_2, y_1)$$

**定義 2.** 関数  $g : \mathcal{L}^n \rightarrow \mathbb{R}$  とベクトル  $\mathbf{z} \in \mathcal{L}^n$  について、 $g$  の  $ij$  成分 ( $i, j \in \{1, \dots, n\}, i < j$ ) への射影とは、関数

$$g_{[i,j,\mathbf{z}]}(x, y) = g(z_1, \dots, z_{i-1}, x, z_{i+1}, \dots, z_{j-1}, y, z_{j+1}, \dots, z_n)$$

のことである。関数  $g$  が劣モジュラであるとは、全ての  $i, j \in \{1, \dots, n\}, i < j$  と全ての  $\mathbf{z} \in \mathcal{L}^n$  について射影  $g_{[i,j,\mathbf{z}]}(x, y)$  が劣モジュラであることである。

この定義は  $\ell = 2$  のときは通常の擬ブール関数の劣モジュラ性の定義と一致する。また、この定義は Flach と Schlesinger [5] による劣凸性 (subconvexity) の定義と同じだが、擬ブール最適化との関連を強調するため、ここでは劣モジュラと呼ぶことにする。

### 2.3 一般化ルーフ双対

対称性条件 (3) により、後に説明するように持続性が証明できる。この持続性により、 $g$  の最小解から  $f$  の最小解についての情報を得ることができる。

与えられた  $f$  について、これら 3 条件を満たす  $g$  は一般に無限個存在する。ただし  $g$  の最小値が  $f$  の最小値の下界であるから、最小値が最大であるような  $g$  を見つけることが望ましい:

$$\max_g \min_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{L}^{2n}} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (4)$$

ただし  $g$  は (1)-(3) を満たす。

この (4) の最適解を  $f$  の一般化ルーフ双対と呼ぶ。これは Kahl と Strandmark [11] による一般化ルーフ双対のさらなる一般化である。次節では、このようにルーフ双対を多値変数の場合に拡張しても、2 値の時に成り立つ持続性が維持されることを示す。

その前に、対称性条件 (3) を加えたことで劣モジュラ緩和関数の最小値の最大値は変わっていないことを示しておく。

**命題 1.** 関数  $f : \mathcal{L}^n \rightarrow \mathbb{R}$  について最適化問題

$$\max_g \min_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{L}^{2n}} g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

ただし  $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}^n : g(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = f(\mathbf{x})$ , (5)  
 $g$  は劣モジュラ。

の最適解には対称なものが存在する。つまり  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L}^n : g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}})$  を満たす最適解  $g : \mathcal{L}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  が存在する。

(証明) 関数  $g : \mathcal{L}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  の対称部分と反対称部分を

$$g_{\text{sym}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + g(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}})),$$

$$g_{\text{asym}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - g(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}}))$$

で定義すると、 $g$  は次のように分解できる。

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g_{\text{sym}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + g_{\text{asym}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

$g_{\text{sym}}$  は対称だから、もし  $g$  が (5) の最適解ならば  $g_{\text{sym}}$  も最適解であることを示せばよい。まず  $g$  の最小値を

$$l = \min_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{L}^{2n}} g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

とすると

$$g_{\text{sym}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + g_{\text{asym}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq l,$$

$$g_{\text{sym}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - g_{\text{asym}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}}) \geq l$$

だから、これらを加えて:

$$2g_{\text{sym}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 2l.$$

つまり、 $g_{\text{sym}}$  の最小値は  $g$  の最小値以上であり、 $g$  が最適解であるという仮定から、もし拘束条件を満たせば  $g_{\text{sym}}$  も最適化問題 (5) の最適解である。

まず、 $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}^n : g(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = f(\mathbf{x})$  という拘束条件は

$$g_{\text{sym}}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}(g(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) + g(\bar{\bar{\mathbf{x}}}, \bar{\mathbf{x}})) = g(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = f(\mathbf{x})$$

で示される。

最後に  $g_{\text{sym}}$  が劣モジュラであることを示すため、 $i, j \in \{1, \dots, 2n\}, i < j$  と  $(\mathbf{z}, \mathbf{z}') \in \mathcal{L}^{2n}$  を固定し、 $i' = (i + n) \bmod 2n$  および  $j' = (j + n) \bmod 2n$  と定義すると、 $g_{\text{sym}}$  の  $i, j, (\mathbf{z}, \mathbf{z}')$  への射影は

$$g_{\text{sym}[i,j,(\mathbf{z}, \mathbf{z}')]}(x, y) = \frac{1}{2}(g_{[i,j,(\mathbf{z}, \mathbf{z}')]}(x, y) + g_{[i',j',(\bar{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{z}})]}(\bar{x}, \bar{y}))$$

と書けるが、 $g$  が劣モジュラだから  $x_1 < x_2, y_1 < y_2$  を満たす任意の  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathcal{L}$  について

$$g_{[i,j,(\mathbf{z}, \mathbf{z}')]}(x_1, y_1) + g_{[i,j,(\mathbf{z}, \mathbf{z}')]}(x_2, y_2)$$

$$\leq g_{[i,j,(\mathbf{z}, \mathbf{z}')]}(x_2, y_1) + g_{[i,j,(\mathbf{z}, \mathbf{z}')]}(x_1, y_2)$$

$$g_{[i',j',(\bar{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{z}})]}(\bar{x}_1, \bar{y}_1) + g_{[i',j',(\bar{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{z}})]}(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$$

$$\leq g_{[i',j',(\bar{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{z}})]}(\bar{x}_2, \bar{y}_1) + g_{[i',j',(\bar{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{z}})]}(\bar{x}_1, \bar{y}_2)$$

が成り立つ。これらを加えると  $g_{\text{sym}}$  の劣モジュラ条件が得られる。□

### 3. 持続性

本節では、条件 (1)-(3) を満たす  $g$  の大域最小解から  $f$  の大域最小解についての情報を得ることができることを示す。この性質を**持続性**と呼ぶ。

#### 3.1 双劣モジュラ性

まず  $S^n \subset \mathcal{L}^{2n}$  を次式で定義する。

$$S^n = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{L}^{2n} \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} : x_i + y_i < \ell, x_i \leq y_i \right\}$$

**命題 2** ([5] Lemma 1).  $g : \mathcal{L}^n \rightarrow \mathbb{R}$  が劣モジュラであることは全ての  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L}^n$  で次が成り立つことと同値である。

$$g(\mathbf{x}) + g(\mathbf{y}) \geq g(\min(\mathbf{x}, \mathbf{y})) + g(\max(\mathbf{x}, \mathbf{y})).$$

**命題 3.** 任意の劣モジュラ対称関数  $g : \mathcal{L}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  について次式が成り立ち、 $g$  を最小化する  $S^n$  の点が存在する。

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L}^n : g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq g(\min(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}}), \min(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y})).$$

(証明) 任意の  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{L}^{2n}$  について

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{2}(g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + g(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}})) \\ &\geq \frac{1}{2}(g(\min(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}}), \min(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y})) + g(\max(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}}), \max(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}))) \\ &= \frac{1}{2}(g(\min(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}}), \min(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y})) + g(\overline{\min(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y})}, \overline{\min(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}})})) \\ &= g(\min(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}}), \min(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y})). \end{aligned}$$

が成り立つ。この式の 1 行目は  $g$  の対称性から、また不等式は命題 2 から得られる。その次の行は

$$\max(x, y) = \overline{\min(\bar{x}, \bar{y})}$$

から、最終行も  $g$  の対称性からわかる。最後に  $(\min(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}}), \min(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y})) \in S^n$  に注意すれば命題が従う。□

この命題によって  $g$  を最小化する際に  $S^n$  上だけを探せばよいことがわかる。次の命題 4 では  $S^n$  に制限された  $g$  が**双劣モジュラ**であることを示す。

演算子  $\sqcap, \sqcup : S^1 \times S^1 \rightarrow S^1$  を次式で定義する。

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) \sqcap (x_2, y_2) &= (\min(x_1, x_2), \min(y_1, y_2)) \\ (x_1, y_1) \sqcup (x_2, y_2) &= (\min(\max(x_1, x_2), \bar{y}_1, \bar{y}_2), \min(\max(y_1, y_2), \bar{x}_1, \bar{x}_2)) \\ &= \begin{cases} (\max(x_1, x_2), \max(y_1, y_2)) & (\max(x_1, x_2) + \max(y_1, y_2) < \ell \text{ のとき}) \\ (\min(\bar{y}_1, \bar{y}_2), \min(\bar{x}_1, \bar{x}_2)) & (\text{それ以外のとき}) \end{cases} \end{aligned}$$

さらにこの定義を要素毎に拡張して  $S^n$  上で定義する。

**定義 3.** 関数  $g : S^n \rightarrow \mathbb{R}$  は、任意の  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1), (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) \in S^n$  について次式を満たすとき**双劣モジュラ**であるという。

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + g(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) \\ \geq g((\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) \sqcap (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)) + g((\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) \sqcup (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)) \end{aligned}$$

**命題 4.** 任意の劣モジュラ対称関数  $g : S^n \rightarrow \mathbb{R}$  は双劣モジュラである。

(証明) 任意の  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1), (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) \in S^n$  について、

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + g(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) \\ \geq g(\min(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \min(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)) + \\ g(\max(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \max(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)) \\ \geq g(\min(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \min(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)) + \\ g(\min(\max(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \min(\bar{\mathbf{y}}_1, \bar{\mathbf{y}}_2)), \\ \min(\max(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2), \min(\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2))) \\ = g((\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) \sqcap (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)) + g((\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) \sqcup (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)) \end{aligned}$$

が、第 1 の不等号は命題 2 から、第 2 の不等号は命題 3 から従う。□

#### 3.2 上書きと持続性

次に、 $g$  の解による  $f$  の解の上書きを定義する。

**定義 4.**  $\mathbf{x} \in \mathcal{L}^n$  と  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \in S^n$  について、 $\mathbf{x}$  の  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$  による上書き  $\mathbf{x} \leftarrow (\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \in \mathcal{L}^n$  を次式で定義する。

$$[\mathbf{x} \leftarrow (\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)]_i = \begin{cases} x_i^* & (x_i < x_i^* \text{ のとき}) \\ \bar{y}_i^* & (\bar{y}_i^* < x_i \text{ のとき}) \\ x_i & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

**命題 5.**  $\mathbf{x}$  の  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$  による上書きを  $\mathbf{z} = \mathbf{x} \leftarrow (\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$  とすると、次式が成り立つ:

$$(z, \bar{z}) = ((\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \sqcup (\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)) \sqcup (\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*).$$

(証明) まず  $i \in \{1, \dots, n\}$  を固定して、上書き演算子の定義を使うと左辺は

$$\begin{aligned} z_i &= \min(\bar{y}_i^*, \max(x_i^*, x_i)), \\ \bar{z}_i &= \max(y_i^*, \min(\bar{x}_i^*, \bar{x}_i)) \end{aligned}$$

である。次に  $\sqcup$  演算子の定義を使って右辺を展開すると、

$$\begin{aligned} ((x_i, \bar{x}_i) \sqcup (x_i^*, y_i^*)) \sqcup (x_i^*, y_i^*) \\ = \left( \min(\max(x_i, x_i^*), x_i, \bar{y}_i^*), \min(\max(\bar{x}_i, \bar{x}_i^*), \bar{x}_i, \bar{x}_i^*) \right) \\ \sqcup (x_i^*, y_i^*) \\ = \left( \min(x_i, \bar{y}_i^*), \min(\bar{x}_i, \bar{x}_i^*) \right) \sqcup (x_i^*, y_i^*) \\ = \left( \min(\max(\min(x_i, \bar{y}_i^*), x_i^*), \min(\bar{x}_i, \bar{x}_i^*), \bar{y}_i^*), \right. \\ \left. \min(\max(\min(\bar{x}_i, \bar{x}_i^*), y_i^*), \min(x_i, \bar{y}_i^*), \bar{x}_i^*) \right) \\ = \left( \min(\max(\min(x_i, \bar{y}_i^*), x_i^*), \max(x_i, x_i^*), \bar{y}_i^*), \right. \\ \left. \min(\max(\min(\bar{x}_i, \bar{x}_i^*), y_i^*), \max(\bar{x}_i, \bar{x}_i^*), \bar{x}_i^*) \right) \\ = \left( \min(\bar{y}_i^*, \max(x_i^*, x_i)), \max(y_i^*, \min(\bar{x}_i^*, \bar{x}_i)) \right) \end{aligned}$$

□

以上で本稿の主要結果である持続性を証明する準備ができた。持続性は「 $g$ の大域最小解で任意の解  $\mathbf{x} \in \mathcal{L}^n$  を上書きしても  $f$  の値は大きくならない」ことを言う。

**定理 1.** 関数  $g$  が (1)-(3) を満たし  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \in S^n$  が  $g$  の大域最小解であるならば、全ての  $\mathbf{x} \in \mathcal{L}^n$  について  $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x} \leftarrow (\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*))$  が成り立つ。

(証明)  $g$  が双劣モジュラだから任意の  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L}^n$  で  $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) - g((\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sqcup (\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)) \geq g((\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sqcup (\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*))$  が成り立つ。また  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$  が  $g$  の最小解であることより

$$0 \geq g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) - g((\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sqcup (\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*))$$

だから、これらの不等式を合わせて

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq g((\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sqcup (\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*))$$

を得る。これを 2 回使って

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= g(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \geq g((\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \sqcup (\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)) \\ &\geq g(((\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \sqcup (\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)) \sqcup (\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)) \\ &= f(\mathbf{x} \leftarrow (\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)). \end{aligned}$$

□

#### 定理の意味

定理 1 で  $\mathbf{x}$  に  $f$  の大域最小解を入れると、上書き  $\mathbf{z} = \mathbf{x} \leftarrow (\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$  も大域最小解である。  $\mathbf{z}$  の成分  $z_i$  は  $x_i^* \leq z_i \leq \bar{y}_i^*$  を満たすから、  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$  は各  $i$  について  $f$  のある大域最小解が存在する範囲を与える。従って、2 値の QPBO におけるのと同様に、  $x_i^* = \bar{y}_i^*$  であるときには  $x_i = x_i^*$  とすれば大域最小解が得られる。2 値の場合と異なるのは、ラベルの組  $x_i^*, y_i^*$  が  $x_i^* < \bar{y}_i^*$  の場合でも  $f$  の最小解についての情報を含むことである。このように、  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$  から  $f$  の部分的なラベル付けが得られない場合でも、  $f$  の大域最小解を探す範囲をより小さくすることができる。何の情報も得られないのは  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = (0, 0)$  の場合のみである。

### 4. 1 階の場合

本節では  $f$  が 1 階の場合には (4) の最適解  $g$ 、つまり  $f$  の最適劣モジュラ緩和関数が具体的に求められることを示す。この  $g$  は劣モジュラだから大域最小解を求めることができ、それから上記のように  $f$  のある大域最小解のある範囲を限定する情報が得られる。

#### 4.1 最適条件

任意の 1 階関数は

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i < j} \gamma_{ij}(x_i, x_j), \quad (6)$$

の形に書けることに注意する。なぜなら、もし  $i < j$  について  $\gamma_{ji}(x_j, x_i)$  の形の項があれば  $\gamma_{ij}(x_i, x_j)$  に加えればよいし、  $\gamma_i(x_i)$  や  $\gamma_i(x_i, x_i)$  の形の項は  $\gamma_{ij}(x_i, x_j)$  または  $\gamma_{ki}(x_k, x_i)$  の形の項に加えてしまえばよいからである。まず対称性条件 (3) を常に満たす  $g$  の表現を与える。

**命題 6.** 任意の 1 階対称関数  $g: \mathcal{L}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  は

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \sum_{i \leq j} (\theta_{ij}(x_i, x_j) + \theta_{ij}(\bar{y}_i, \bar{y}_j) + \theta'_{ij}(x_i, \bar{y}_j) + \theta'_{ij}(\bar{y}_i, x_j)) \quad (7)$$

の形に書くことができる。ここで  $\theta = \{\theta_{ij}, \theta'_{ij}\}_{i \leq j}$  は  $\mathcal{L}^2$  上の関数の組で、以下では  $g$  のパラメータと呼ぶ。

(証明) 任意の 1 階関数  $g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  は

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i \leq j} (\chi_{ij}(x_i, x_j) + \chi'_{ij}(\bar{y}_i, \bar{y}_j) + \chi''_{ij}(x_i, \bar{y}_j) + \chi'''_{ij}(\bar{y}_i, x_j))$$

の形に書くことができる。すると

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + g(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}}) &= \sum_{i \leq j} (\chi_{ij}(x_i, x_j) + \chi'_{ij}(x_i, x_j) + \chi_{ij}(\bar{y}_i, \bar{y}_j) + \chi'_{ij}(\bar{y}_i, \bar{y}_j) \\ &\quad + \chi''_{ij}(x_i, \bar{y}_j) + \chi'''_{ij}(x_i, \bar{y}_j) + \chi''_{ij}(\bar{y}_i, x_j) + \chi'''_{ij}(\bar{y}_i, x_j)) \end{aligned}$$

であり、次のように定義すれば命題を得る。

$$\begin{aligned} \theta_{ij}(x, y) &= \chi_{ij}(x, y) + \chi'_{ij}(x, y), \\ \theta'_{ij}(x, y) &= \chi''_{ij}(x, y) + \chi'''_{ij}(x, y). \end{aligned} \quad \square$$

さて、  $f$  が (6) の形で与えられているとして ( $i < j$  でない  $i, j$  については  $\gamma_{ij}(x, y) = 0$  とする) これを (7) より得られる次式と比較する。

$$g(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \sum_{i \leq j} (\theta_{ij}(x_i, x_j) + \theta'_{ij}(x_i, x_j))$$

**命題 7.** もし  $g$  が  $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$  を満たすならば  $g$  のパラメータ  $\theta = \{\theta_{ij}, \theta'_{ij}\}_{i \leq j}$  で次式を満たすものがある。

$$\forall i \leq j: \gamma_{ij}(x, y) = \theta_{ij}(x, y) + \theta'_{ij}(x, y). \quad (8)$$

(証明)  $\bar{\theta} = \{\bar{\theta}_{ij}, \bar{\theta}'_{ij}\}_{i \leq j}$  を  $g$  のパラメータとして

$$\eta_{ij}(x, y) = \bar{\theta}_{ij}(x, y) + \bar{\theta}'_{ij}(x, y) - \gamma_{ij}(x, y)$$

と定義すると、  $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$  より任意の  $\mathbf{x} \in \mathcal{L}^n$  について

$$h(\mathbf{x}) = \sum_{i \leq j} \eta_{ij}(x_i, x_j) = 0 \quad (9)$$

が成り立つ。ゆえに  $\theta$  を

$$\theta_{ij}(x, y) = \bar{\theta}_{ij}(x, y) - \eta_{ij}(x, y), \quad \theta'_{ij}(x, y) = \bar{\theta}'_{ij}(x, y)$$

と定義すれば (8) を満たし、 (7), (9) より  $\theta$  は  $g$  のパラメータである。 □

以下、  $x_1 < x_2, y_1 < y_2$  を満たす  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathcal{L}$  の組  $(x_1, x_2, y_1, y_2)$  をブロックと呼ぶことにして、全てのブロックの集合を  $B$  で表す。ブロックは  $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$  の中で

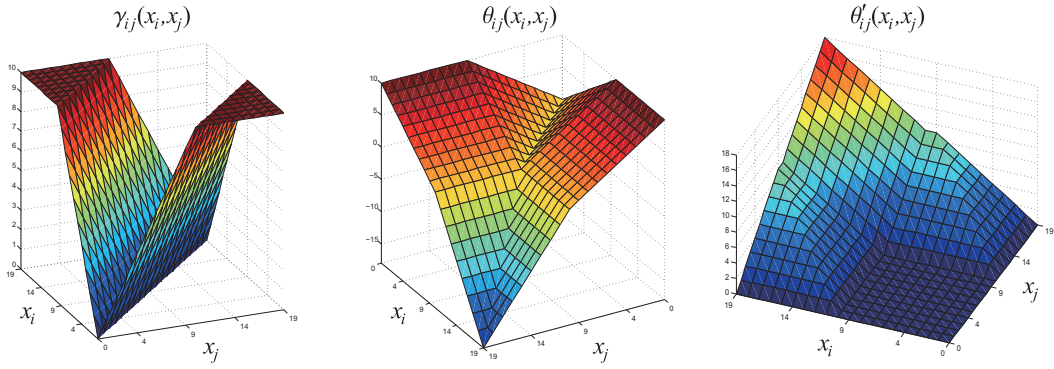


図2 非劣モジュラな平滑化項とその最適劣モジュラ緩和関数.

非劣モジュラな平滑化項  $\gamma_{ij}(x_i, x_j) = \min(|x_i - x_j|, 10)$  とそれから §4.2 で述べた構成法により得られる  $\theta_{ij}(x_i, x_j), \theta'_{ij}(x_i, x_j)$ .

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  を対角線とする長方形を指定する. ブロックに対して次の記号を定義する.

$$\begin{aligned} \alpha_{ij}(x_1, x_2, y_1, y_2) &= \\ &\gamma_{ij}(x_1, y_1) + \gamma_{ij}(x_2, y_2) - \gamma_{ij}(x_1, y_2) - \gamma_{ij}(x_2, y_1), \\ \alpha_{ij}^-(x_1, x_2, y_1, y_2) &= \min(0, \alpha_{ij}(x_1, x_2, y_1, y_2)), \\ \beta_{ij}^\theta(x_1, x_2, y_1, y_2) &= \\ &\theta_{ij}(x_1, y_1) + \theta_{ij}(x_2, y_2) - \theta_{ij}(x_1, y_2) - \theta_{ij}(x_2, y_1), \\ \beta_{ij}'^\theta(x_1, x_2, y_1, y_2) &= \\ &\theta'_{ij}(x_1, y_1) + \theta'_{ij}(x_2, y_2) - \theta'_{ij}(x_1, y_2) - \theta'_{ij}(x_2, y_1). \end{aligned}$$

すると, 最適化問題 (4) を以下のように書き換えることができる.

$$\max_{\theta} \min_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L}^{2n}} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (10)$$

ただし  $\theta$  は  $g$  のパラメータで  $\forall i \leq j$  について

$$\forall x, y \in \mathcal{L}: \gamma_{ij}(x, y) = \theta_{ij}(x, y) + \theta'_{ij}(x, y), \quad (11)$$

$$\forall (x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathcal{B}: 0 \geq \beta_{ij}^\theta(x_1, x_2, y_1, y_2), \quad (12)$$

$$\forall (x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathcal{B}: 0 \leq \beta_{ij}'^\theta(x_1, x_2, y_1, y_2). \quad (13)$$

条件 (11) と  $\gamma_{ii}(x, y) = 0$  より  $\theta_{ii}(x, y) = -\theta'_{ii}(x, y)$  であり, 従って  $i = j$  のときは (12) と (13) は同じ条件である.

**定理 2.**  $\theta$  が  $g$  のパラメータで (11) と

$$\begin{aligned} \forall (x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathcal{B}: \\ \beta_{ij}^\theta(x_1, x_2, y_1, y_2) &= \\ &\sum_{x_1 \leq x < x_2} \sum_{y_1 \leq y < y_2} \alpha_{ij}^-(x, x+1, y, y+1) \end{aligned} \quad (14)$$

を満たすならば,  $\theta$  は (10) の最適解である.

(証明) 条件 (11) より

$$\alpha_{ij}(x_1, x_2, y_1, y_2) = \beta_{ij}^\theta(x_1, x_2, y_1, y_2) + \beta_{ij}'^\theta(x_1, x_2, y_1, y_2)$$

である. 従って条件 (12) と (13) は次と同値である.

$$\begin{aligned} \forall (x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathcal{B}: \\ \alpha_{ij}^-(x_1, x_2, y_1, y_2) \geq \beta_{ij}^\theta(x_1, x_2, y_1, y_2). \end{aligned} \quad (15)$$

また, 任意の  $x_1 < x_2 < x_3, y_1 < y_2 < y_3$  について

$$\begin{aligned} \beta_{ij}^\theta(x_1, x_3, y_1, y_3) &= \beta_{ij}^\theta(x_1, x_2, y_1, y_2) + \beta_{ij}^\theta(x_1, x_2, y_2, y_3) + \\ &\beta_{ij}^\theta(x_2, x_3, y_1, y_2) + \beta_{ij}^\theta(x_2, x_3, y_2, y_3), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{ij}^-(x_1, x_3, y_1, y_3) &\geq \alpha_{ij}^-(x_1, x_2, y_1, y_2) + \alpha_{ij}^-(x_1, x_2, y_2, y_3) + \\ &\alpha_{ij}^-(x_2, x_3, y_1, y_2) + \alpha_{ij}^-(x_2, x_3, y_2, y_3) \end{aligned}$$

が成り立つから, ブロック  $(x_1, x_3, y_1, y_3)$  についての条件  $\alpha_{ij}^- \geq \beta_{ij}^\theta$  は 4 分割したブロック  $(x_1, x_2, y_1, y_2), (x_1, x_2, y_2, y_3), (x_2, x_3, y_1, y_2), (x_2, x_3, y_2, y_3)$  についての条件から自動的に導かれる. つまり, より小さいブロックについての条件の方が厳しい条件である. 従って, (15) は最も小さいブロックについての条件と同値である:

$$\forall x, y \in \{0, \dots, \ell - 2\}:$$

$$\alpha_{ij}^-(x, x+1, y, y+1) \geq \beta_{ij}^\theta(x, x+1, y, y+1). \quad (17)$$

よって (14) より  $\theta$  は (10) の拘束条件を全て満たす.

一方, (16), (17) より

$$\forall (x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathcal{B}:$$

$$\sum_{x_1 \leq x < x_2} \sum_{y_1 \leq y < y_2} \alpha_{ij}^-(x, x+1, y, y+1) \geq \beta_{ij}^\theta(x_1, x_2, y_1, y_2) \quad (18)$$

も必要である. 命題 3 により  $x_i < \bar{y}_i, x_j < \bar{y}_j$  と仮定できるから,

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \sum_{i \leq j} \left( \beta_{ij}^\theta(x_i, \bar{y}_i, x_j, \bar{y}_j) + \gamma_{ij}(x_i, \bar{y}_j) + \gamma_{ij}(\bar{y}_i, x_j) \right)$$

は (18) の全ての不等式で等号が成り立つときに最大になる. 従って,  $\theta$  は最適解である.  $\square$

## 4.2 最適劣モジュラ緩和関数の構成

次に, 一般の 1 階多値エネルギー  $f$  に対して最適な劣モジュラ緩和関数  $g$  を具体的にどう求めるかを示す. 関数  $f$  が (6) の形で与えられているとして  $g$  のパラメータ  $\theta = \{\theta_{ij}, \theta'_{ij}\}_{i \leq j}$  を定義する. まず各  $i \leq j, x \in \mathcal{L}$  について

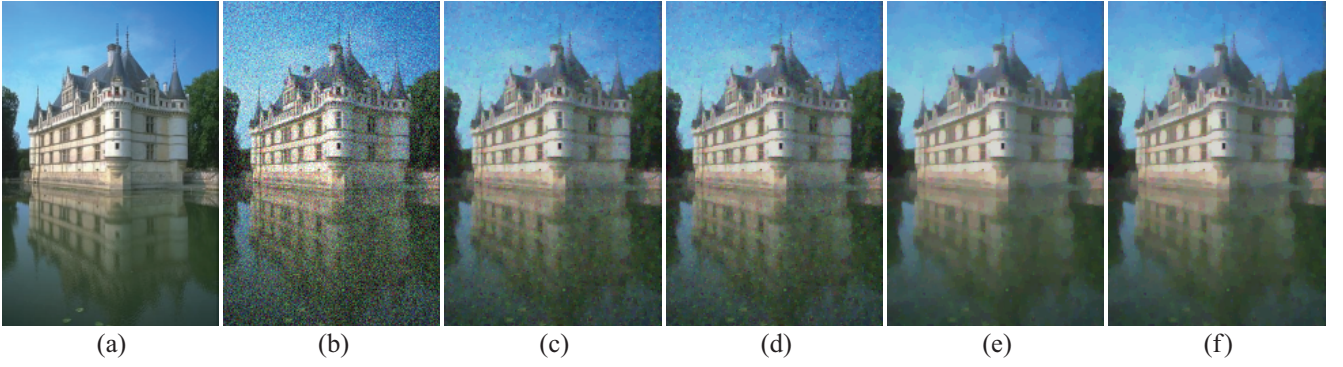


図3 一般化ルーフ双対性によるノイズ除去の例

(a) 元画像 (b)  $\sigma = 0.2$  のガウシアンノイズを加えた画像 (c)(d)  $\lambda = 3$  のときの下限と上限 (e)(f)  $\lambda = 5$  のときの下限と上限

$$\theta_{ij}(x, 0) = \theta_{ij}(0, x) = 0$$

と定義し、次に  $x, y \in \mathcal{L}$  について帰納的に

$$\begin{aligned} \theta_{ij}(x, y) = & \alpha_{ij}^-(x-1, x, y-1, y) \\ & - \theta_{ij}(x-1, y-1) + \theta_{ij}(x, y-1) + \theta_{ij}(x-1, y) \end{aligned}$$

と  $\theta_{ij}(x, y)$  を定義する。最後に  $\theta'_{ij}(x, y)$  を

$$\theta'_{ij}(x, y) = \gamma_{ij}(x, y) - \theta_{ij}(x, y)$$

と定義する。

このように定義されたパラメータ  $\theta = \{\theta_{ij}, \theta'_{ij}\}_{i \leq j}$  が (11) と (14) を満たすことは簡単に確かめられる。従って定理2より、このパラメータにより (7) で与えられる  $g$  は (4) の最適解であり従って  $f$  の一般化ルーフ双対である。劣モジュラ関数  $g$  は Schlesinger と Flach [16] によるグラフカットアルゴリズムで大域最小化できる。この構成は [12] における QPBO 適用後に一致する。つまり定理2は [12] の一般化ルーフ双対としての最適性を示したことになる。図2に非劣モジュラ関数  $\gamma_{ij}(x_i, x_j) = \min(|x_i - x_j|, 10)$  と、その最大劣モジュラ緩和関数を示す。

## 5. ノイズ除去の例

ここではノイズ除去を例として一般化ルーフ双対アルゴリズムの有効性を実験的に確かめる。ノイズ除去問題を多値 MRF 問題としてとらえるため、グレースケール画像を画素の集合  $\mathcal{P}$  上の離散関数  $I: \mathcal{P} \rightarrow \{0, \dots, 255\}$  と考える。ノイズ除去後の画像は与えられた画像  $I$  に近く、その一方でノイズが少ないことが望まれる。そこでノイズ除去後の画像は次の1階多値 MRF エネルギーを最小にすると考える:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{p \in \mathcal{P}} D_p(\mathbf{x}) + \lambda \sum_{pq \in \mathcal{N}} S_{pq}(\mathbf{x}). \quad (19)$$

ここで  $\mathcal{N}$  は画素間の隣接構造、 $\lambda > 0$  はパラメータ、 $D_p, S_{pq}$  はデータ項と平滑化項である。実験においては4方向の隣接構造を使った。データ項  $D_p(\mathbf{x})$  は  $\mathbf{x}$  が  $I$  に近くなるようにしむけるため

$$D_p(\mathbf{x}) = (I(p) - \mathbf{x}(p))^2$$

と定義される。ノイズ除去後の画像は与えられたノイズ画像よりも滑らかであると仮定し、平滑化項は  $\mathbf{x}$  の隣接画素間の値の変化の絶対値の関数として次のように定義され、大きな変化にペナルティを与える:

$$S_{pq}(\mathbf{x}) = \min(|\mathbf{x}(p) - \mathbf{x}(q)|, T).$$

この平滑化項は非劣モジュラである。図2に平滑化項とその最適劣モジュラ緩和のグラフを示す。

エネルギー  $f$  の最適劣モジュラ緩和  $g$  を構成し、その大域最小解  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$  を求めると、その値  $g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$  は元のエネルギー  $f$  の大域最小値の下界である。これは、エネルギー最小化の成功度合の測定に重要である。例えば  $f(\mathbf{z}) = g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$  をとる  $\mathbf{z}$  が見つければ、それは実際は  $f$  の大域最小解であることがわかる。

さらに、 $g$  の大域最小解は大域最小解が各画素でとり得る値の拘束という形で情報を与える。ノイズ除去の場合には、この拘束は各画素において大域最小解がとり得る値の最小値と最大値を与える。

図1, 図3にノイズ除去の例を示す。

また、図4に、異なるパラメータ値におけるノイズ除去の結果を示す。右側の画像は、3つのパラメータ値の組における、各画素で与えられる範囲の下限と上限の値の画像である。持続性定理 (定理1) により、元のエネルギーの大域最小解はこれらの下限と上限の間にあることが保障される。閾値  $T = 8$  と  $T = 10$  では、平均の幅は 22.68 と 22.33 であったが、 $T = 12$  では 1.14 に過ぎない。図4の左側のグラフは、パラメータ  $T, \lambda$  の値と画素毎の範囲の幅の平均値の関係を表す。このように、同じ形のエネルギーであってもパラメータによって最小化できる度合いが異なる。

一般には NP 困難な形のエネルギーなので当然、全ての場合に最小化できることは望めないが、このように大域最小解が各画素においてとるラベルの範囲の幅によって、最小化がどの程度成功しているか評価可能である。

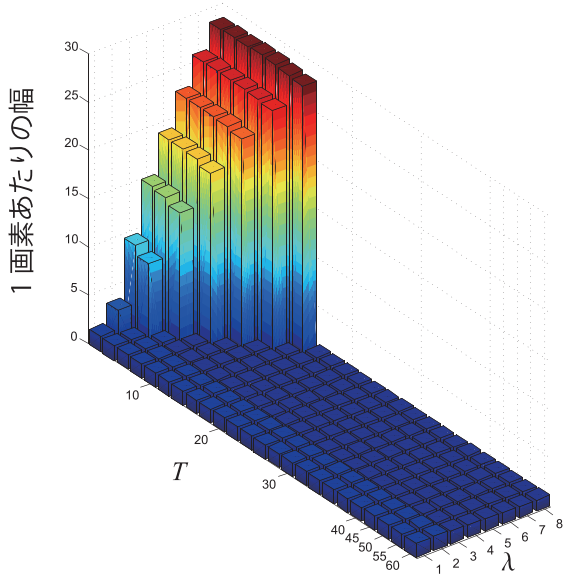


図4 画像ノイズ除去エネルギー (19) の一般化ルーフ双対の計算

エネルギー (19) において閾値  $T$  を変えながら一般化ルーフ双対を計算してノイズ除去を行った結果を示す。最適劣モジュラ緩和関数の大域最小解は各画素において元のエネルギーのある大域最小解がとり得るラベルの範囲を与えるが、グラフは異なるパラメータ値におけるこの範囲の幅の平均値を表す。幅が小さいほど、エネルギーの大域最小解に近い値を得ることができる。右側の画像は、3つのパラメータ値の組における、各画素で与えられる範囲の下限と上限の値の画像である。閾値  $T = 8$  と  $T = 10$  では、平均の幅は 22.68 と 22.33 であったが、 $T = 12$  では 1.14 に過ぎない。

## 6. むすび

本稿では2値エネルギー最小化問題のルーフ双対の概念を線形順序を持つ多ラベルの場合に一般化し、持続性が多値の場合にもエネルギーの階数によらず成立することを示した。この持続性により、少なくとも1つの大域最小解が各画素においてとるラベルの範囲という形で、非劣モジュラなエネルギーについても、情報を得ることができる。本稿ではまた、1階の場合には与えられたエネルギーの最適劣モジュラ緩和関数を具体的に構成することができることを示し、それにより劣モジュラでない多値エネルギーを部分的に最小化するQPBOの多値版アルゴリズムを与えた。また、各画素においてアルゴリズムが与える大域最小解のラベルの範囲の幅によって、最小化がどの程度成功しているかも評価可能である。

**謝辞** 本研究は Erasmus Mundus-BEAM プログラム，科学技術振興機構さきがけ研究，科学研究費補助金（基盤研究 B 24300075，新学術領域研究 24103709），および ERC Starting grant ‘ConvexVision’ の補助を受けた。

## 文 献

- [1] E. Boros, P. L. Hammer, R. Sun and G. Tavares: “A max-flow approach to improved lower bounds for quadratic unconstrained binary optimization (QUBO)”, *Discrete Optimization*, **5**, 2, pp. 501–529 (2008).
- [2] E. Boros, P. L. Hammer and G. Tavares: “Preprocessing of unconstrained quadratic binary optimization”, RUTCOR Research Report RRR 10-2006 (2006).
- [3] Y. Boykov, O. Veksler and R. Zabih: “Fast approximate energy minimization via graph cuts”, *IEEE Trans. on Patt. Anal. and Mach. Intell.*, **23**, 11, pp. 1222–1239 (2001).
- [4] A. Fix, A. Grubner, E. Boros and R. Zabih: “A graph cut algorithm for higher-order Markov random fields”, *IEEE Int. Conf. on Computer Vision* (2011).
- [5] B. Flach and D. Schlesinger: “Best labeling search for a class of higher order gibbs models”, *Pattern Recognition and Image Analysis*, **14**, 2, pp. 249–254 (2004).
- [6] A. C. Gallagher, D. Batra and D. Parikh: “Inference for order reduction in Markov random fields”, *Int. Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition* (2011).
- [7] P. L. Hammer, P. Hansen and B. Simeone: “Roof duality, complementation and persistency in quadratic 0-1 optimization”, *Math. Programming*, **28**, 2, pp. 121–155 (1984).
- [8] 石川 博: 「高階グラフカット」, 画像の認識・理解シンポジウム (2009).
- [9] H. Ishikawa: “Exact optimization for Markov random fields with convex priors”, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **25**, pp. 1333–1336 (2003).
- [10] H. Ishikawa: “Transformation of general binary MRF minimization to the first order case”, *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **33**, pp. 1234–1249 (2011).
- [11] F. Kahl and P. Strandmark: “Generalized roof duality for pseudo-Boolean optimization”, *IEEE Int. Conf. on Computer Vision* (2011).
- [12] P. Kohli, A. Shekhovtsov, C. Rother, V. Kolmogorov and P. Torr: “On partial optimality in multi-label MRFs”, *Proc. 25th Int. Conf. on Machine Learning*, pp. 480–487 (2008).
- [13] V. Kolmogorov: “Generalized roof duality and bisubmodular functions”, *Discrete Applied Mathematics*, **160**, (2011).
- [14] C. Rother, V. Kolmogorov, V. Lempitsky and M. Szummer: “Optimizing binary MRFs via extended roof duality”, *Int. Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition* (2007).
- [15] D. Schlesinger: “Exact solution of permuted submodular MinSum problems”, *Energy Minimization Methods in Comp. Vis. and Patt. Recog.*, pp. 28–38 (2007).
- [16] D. Schlesinger and B. Flach: “Transforming an arbitrary minsum problem into a binary one”, Technical report, TU Dresden (2006).